Capitolo 5

Applicazioni lineari

Soluzioni Esercizi

Esercizio 5.6.1 Dire se le seguenti applicazioni siano lineari o no.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, 2x - y, 3xy)$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x, x^2, x^3)$.
6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$.
7. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z + 1$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.2 Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ nei seguenti casi:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, x + 2z, y - z)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \mathcal{E}_3$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (2x, 5x, 6x)$, $\mathcal{B} = \{1\}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{E}_3$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, x, y)$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{E}_3$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^7$, $f(x, y) = (x, 2x, 3y, x + y, 2x - 4y, x - 12y, 21y)$, $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$, $\mathcal{B}' = \mathcal{E}_7$.
5. Provare a scegliere basi diverse negli esercizi precedenti e trovare la $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ per le basi scelte.

Soluzione Esercizio:

1.
$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3.
$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.
$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 1 & -12 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.3 Sia data un'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f((0,1,1)) = (3,0,0)$$

$$f((2,0,1)) = (2,1,2)$$

$$f((2,1,2)) = (0,-1,1).$$

Dimostrare che f non è lineare.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.4 Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, ove sia fissata la base canonica $\mathcal{E}_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = 2e_1 + e_2 - 3e_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = e_1 + 3e_2 - 2e_3 \\ f(\mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1) - 2f(\mathbf{e}_2) \end{cases}.$$

Si scriva la matrice associata a f rispetto a $\mathcal{E}_3$.

La f è iniettiva? È suriettiva?

Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i tre vettori $\mathbf{v}_1 = (0,1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (3,2,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,0)$. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{E}_3\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.5 In $\mathbb{R}^3$, fissata la base canonica, si consideri l'endomorfismo definito da

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = m\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

ove m è un parametro reale. Stabilire, al variare di m, se f sia iniettiva, suriettiva. Dare a m un valore per cui f non sia suriettiva e calcolare, in quel caso, una base per $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.6 Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ due basi di $\mathbb{R}^2$, ove $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{v}'_2 = (1, -1)$, $\mathbf{v}'_2 = (1, 1)$. Scrivere la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2})$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.7 Si consideri l'endomorfismo in $\mathbb{R}^3$, dato da $f(x, y, z) = (x - z, 2x + y, 2y + z)$. Si tratta di un isomorfismo?

Considerata la base $\mathcal{B}$ costituita dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 1)$, determinare la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

Soluzione Esercizio: Iniziamo col costruire la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$. Calcoliamo $f(1, 0, 1) = (0, 2, 1)_{\mathcal{E}}$, $f(2, 0, 0) = (2, 4, 0)_{\mathcal{E}}$, $f(-1, 1, 1) = (-2, -1, 3)_{\mathcal{E}}$. Ora esprimiamo i vettori ottenuti nella base $\mathcal{B}$:

- $(0, 2, 1) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 0, 0) + \gamma(-1, 1, 1)$. Quindi $(0, 2, 1) = (\alpha + 2\beta - \gamma, \gamma, \alpha + \gamma)$. Da cui
$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3/2 \\ \gamma = 2 \end{cases}.$$

- $(2, 4, 0) = (\alpha + 2\beta - \gamma, \gamma, \alpha + \gamma)$. Da cui
$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 4 \end{cases}.$$

- $(-2, -1, 3) = (\alpha + 2\beta - \gamma, \gamma, \alpha + \gamma)$. Da cui
$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -7/2 \\ \gamma = -1 \end{cases}.$$

Quindi
$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 3/2 & 5 & -7/2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che le colonne della matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ rappresentano tre vettori linearmente indipendenti da cui si deduce che la f è suriettiva. Essendo un endomorfismo è anche iniettiva e quindi un isomorfismo.

Esercizio 5.6.8 In $\mathbb{R}^2$ si consideri la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ con $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 0)$, e l'applicazione lineare f che, rispetto alla base $\mathcal{B}$, è associata alla matrice

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.

Soluzione Esercizio: Ricordiamo che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id). \tag{5.1}$$

La più semplice da scrivere è $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id)$ in quanto basta mettere in colonna i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id)$ occorre invece calcolare i coefficienti delle combinazioni lineari della base $\mathcal{B}$ che occorrono per scrivere la base canonica:

$$\begin{pmatrix} (1,0) = \alpha(1,1) + \beta(-1,2) \\ (0,1) = \alpha'(1,1) + \beta'(-1,2) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \alpha' - \beta' = 0 \\ \alpha' + 2\beta' = 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo questi due sistemi otteniamo che $\alpha = 2/3, \beta = -1/3$ e $\alpha' = 1/3, \beta' = 1/3$. Quindi:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Inserendo queste matrici in (5.1) otteniamo:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 \\ 8/3 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.9 In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'endomorfismo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ definito da:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 - x_2 + 2x_4 \\ y_3 = x_2 + x_3 - x_4 \\ y_4 = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare la dimensione e una base per $\mathrm{Im}(f)$.
2. Trovare una base per $Ker(f)$.

Soluzione Esercizio: La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è :

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Osserviamo che le prime 3 colonne di $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ sono tre vettori linearmente indipendenti, mentre la quarta colonna è linearmente dipendente dalle prime 3. Quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(2,1,0,0),(1,-2,1,0),(3,0,1,0)\}$.
2. Per una base di $\mathrm{Ker}(f)$ occorre risolvere il sistema

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   L'insieme delle soluzioni del sistema suddetto è $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = -x_4, x_2 = 0, x_3 = x_4\}$. Quindi una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(-1,0,1,1)\}$.

Esercizio 5.6.10 In $\mathbb{R}^4$, in cui si pensa fissata la base canonica $\mathcal{E}_4$, sono dati:

- l'applicazione lineare f tale che

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \\ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \end{cases}$$

- il sottospazio V di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

  (ove x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate in $\mathbb{R}^4$ associate a $\mathcal{E}_4$).

Determinare la dimensione e una base per $f(V)$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.11 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = (hx - y, y, hx + hy + z)$ dove $h \in \mathbb{R}$. Dopo aver determinato i valori di h in corrispondenza dei quali f è un isomorfismo, scrivere per uno di essi un'espressione analitica dell'applicazione lineare inversa f^{-1}.

Soluzione Esercizio: La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tre colonne di questa matrice sono indipendenti solo se $h \neq 0$, quindi f è un isomorfismo per ogni $h \neq 0$. Prendiamo $h = 1$. La matrice inversa di $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ con $h = 1$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $f^{-1}(a, b, c) = (a + b, b, -a - 2b + c)$.

Esercizio 5.6.12 Si consideri l'endomorfismo $f_{A_h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h \\ -1 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Si stabilisca, al variare di h, se f_{A_h} sia iniettiva, suriettiva.

Soluzione Esercizio: Le tre colonne di $\det(A_h)$ sono linearmente indipendenti solo per $h \neq 0$. Dunque f_{A_h} è sia iniettava che suriettiva per ogni $h \neq 0$.

Esercizio 5.6.13 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ove $f(x, y) = (x + y, x - 2y, x)$. Determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, dove $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, -1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$.

Soluzione Esercizio:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.14 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, data da $f(x, y) = (-x + 3y, 3x - y, 4x)$. Si determini $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dove

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, -1)\}.$$

Soluzione Esercizio:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.15 Per ognuna delle seguenti coppie di basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$ determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2})$:

- $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,\sqrt{3}),(\sqrt{3},1)\}$,
- $\mathcal{B} = \{(1,-1),(9,1/2)\}$, $B' = \{(1,0),(2,1)\}$,
- $\mathcal{B} = \{(2,1),(0,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(\sqrt{5}-1,\sqrt{5}),(1,0)\}$.

Soluzione Esercizio:

- $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
- $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ (5+\sqrt{5})/2 & (\sqrt{5}-10)/5 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5.6.16 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x,y,z) = (x+y-z, y+z, 2x)$. Determinare la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica e $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$.

Soluzione Esercizio:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.17 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare $f(x,y,z) = (x+kz, x-y, y-z, x+ky+(1-k)z)$.

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$: $\dim \mathrm{Im} f$ e $\dim \ker f$ e dire se la f sia suriettiva e/o iniettiva.

Soluzione Esercizio: Osserviamo subito che essendo la dimensione del dominio minore di quella del codominio, la f non sarà mai suriettiva.

La matrice associata ad f (rispetto alle basi canoniche) risulta:

$$M_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1-k \end{pmatrix},$$

che tramite un'eliminazione di Gauss, può esser portata nella forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dell'immagine è 3 mentre quella del nucleo è $n - 3 = 0$, perciò la f è sempre iniettiva.

Esercizio 5.6.18 Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Determinare la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$.

Soluzione Esercizio:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 4 & 4 & 10 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.19 Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito, rispetto alle basi $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1), (1,0,0), (1,0,-1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0), (2,1,0), (0,-1,2)\}$, dalla seguente matrice:

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)$ che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}_3 = \{(-1,0,-1), (1,1,1), (1,-1,0)\}$ e $\mathcal{B}_4 = \{(0,0,1), (1,0,1), (2,1,0)\}$.

Soluzione Esercizio: L'operazione da impostare è la seguente:

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_4}(id) \cdot M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \cdot M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1}(id) = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f).$$

Le matrici cercate sono:

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_4}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.20 Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $f(x, y, z) = (2kx + by - z, (k + 1)y + (k - 2a)z, (2a - 1)z)$.

Dire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quando f sia iniettiva e/o suriettiva. Per i valori di k per cui f non è un isomorfismo, trovare delle basi per $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$.

Soluzione Esercizio: Se $a \neq 1/2$ allora la f sarà sia iniettiva che suriettiva per ogni $k \neq 0, -1$; se invece $a = 1/2$ non vi è nessun valore di k che renda la f iniettiva e/o suriettiva.

$a \neq 1/2$:

- k=0: Una base per $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(b, 1, 0), (-1, -2a, 2a - 1)\}$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(1, 0, 0)\}$.
- k=-1: Una base per $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(-2, 0, 0), (-1, -1 - 2a, 2a - 1)\}$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(b/2, 1, 0)\}$.

$a = 1/2$:

- k=0: Se $b \neq 1$ allora una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(b, 1, 0), (-1, -1, 0)\}$ altrimenti se $b = 1$ una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(1, 1, 0)\}$. Se $b \neq 1$ allora una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(1, 0, 0)\}$, altrimenti se $b = 1$ una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$.
- k=-1: Una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(-2, 0, 0), (-1, -2, 0)\}$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(-b/2, 1, 0)\}$.

Esercizio 5.6.21 Sia f un endomorfinsmo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (2x, z - y, y + x)$.

1. Trovare dimensioni e basi di $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$;
2. Determinare dimensioni e basi per $f(U) \cap f(V)$ e $f(U) + f(V)$ dove $U = \langle (0, 0, 1), (2, 1, 0) \rangle$ e $V = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$.

Soluzione Esercizio:

1. Una base per $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(2, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 1, 0)\}$ quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$ è 3, perciò il nucleo è il sottospazio nullo.
2. Calcoliamo dapprima $f(U)$ ed $f(V)$:
   $f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$,
   $f(2, 1, 0) = (4, -1, 3)$,
   $f(1, 0, 1) = (2, 1, 1)$ e
   $f(1, 1, 0) = (2, -1, 2)$.

I vettori $(0,1,0)$ e $(4,-1,3)$ sono linearmente indipendenti, quindi $f(U) = \langle(0,1,0),(4,-1,3)\rangle$; anche i vettori $(2,1,1)$ e $(2,-1,2)$ sono linearmente indipendenti, quindi $f(V) = \langle(2,1,1),(2,-1,2)\rangle$.

Iniziamo col descrivere $f(U) \cap f(V)$. I vettori di $f(U)$ sono tutti del tipo $(4b, a-b, 3b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, mentre $f(V) = \{(2a'+2b', a'-b', a'+2b') \in \mathbb{R}^3 \mid a', b' \in \mathbb{R}\}$. Quindi un vettore apparterrà alla loro intersezione se esistono degli $a, b, a'b'$ tali che $(4b, a-b, 3b) = (2a'+2b', a'-b', a'+2b')$. Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 4b = 2a' + 2b' \\ a - b = a' - b' \\ 3b = a' + 2b' \end{cases}.$$

Esso ha soluzione $a = b = a' = b'$. Perciò $f(U) \cap f(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4a, y = 0, z = 3a\}$, quindi $\dim(f(U) \cap f(V)) = 1$.

Un sistema di generatori di $f(U) + f(V)$ è dato dai generatori di $f(U)$ assieme a quelli di $f(V)$:
$f(U) + f(V) = \langle(0,1,0),(4,-1,3),(2,1,1),(2,-1,2)\rangle$. Trattandosi di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ potrà avere al massimo dimensione 3. In effetti i primi 3 vettori sono linearmente indipendenti tra loro, quindi $f(U) + f(V) = \mathbb{R}^3$ perciò la sua dimensione è 3 e come base possiamo prendere ad esempio la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sarebbe andata bene anche $\{(0,1,0),(4,-1,3),(2,1,1)\}$: una qualunque terna di vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ avrebbe fatto all'uopo).

Esercizio 5.6.22 Sia $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'endomorfinsmo rappresentato dalla funzione "derivata"; cioè :

$$f(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0) =$$
$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1,$$

vale a dire che per ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $f(p(x)) = p'(x)$.

Dimostrare che f è lineare.

Determinare $\mathrm{Im} f$, $\ker f$ e una loro base.

Soluzione Esercizio: Vediamo la linearità :
$\alpha f((a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0) + \beta f(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0)) =$
$= n\alpha a_n x^{n-1} + (n-1)\alpha a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2\alpha x + a_1\alpha + n\beta b_n x^{n-1} + (n-1)\beta b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2b_2\beta x + a_1\beta =$
$= n(\alpha a_n + \beta b_n)x^{n-1} + (n-1)(\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-2} + \cdots + 2(\alpha a_2 + \beta b_2)x + (\alpha a_1 + \beta b_1)$
$= f(\alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0) + \beta(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0))$.

Determiniamo il nucleo: $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1 = 0$ solo se $a_n = \cdots = a_1 = 0$, quindi il nucleo di f sono le costanti, quindi una sua base è $\{1\}$.

L'immagine di f è invece tutto $\mathbb{R}[x]$ quindi una sua base è data da $\{1, x, x^2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Esercizio 5.6.23 Sia $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ (ove $\mathbb{R}[x]_3$ è lo spazio dei polinomi in x di grado ≤ 3, più il polinomio nullo) l'endomorfinsmo rappresentato dalla funzione "derivata" (vedi esercizio precedente). Data la base $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}[x]_3$, determinare la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.24 Sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_3.$$

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

2. Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ sia di $\mathrm{Im} f$.

3. Determinare la dimensione e una base di $f(W)$ dove W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 \ = \ x_2 + x_4 \ = 0\}.$$

Soluzione Esercizio:

1. La matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. L'immagine ha dimensione 3 e il nucleo ha dimensione 1. Una base dell'immagine è $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ e una base del nucleo è $\{(0, 1, 0, 0)\}$.

3. Cerchiamo prima una base di W: $W = \langle(-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\rangle$. Ora troviamo le immagini dei vettori di base di W: $f(-1, 0, 1, 0) = (-1, 1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$, quindi $f(W) = \langle(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\rangle$ ed essendo $(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$ linearmente indipendenti, formano pure una base i $F(W)$ che ha quindi dimensione 2.

Esercizio 5.6.25 Sia $\mathbb{R}[x]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

1. Verificare che esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ tale che

$$f(2+3x) = 3+3x, \ f(x+2x^2) = 1+3x+2x^2, \ f(1-x^2) = -x-x^2.$$

2. Calcolare dimensioni di Imf e di $\ker f$.

Soluzione Esercizio:

1. La f è assegnata su vettori di base di $\mathbb{R}[x]_2$ e questo è sufficiente a provare l'unicità .

2. Osserviamo che $1+3x+2x^2 = (1/3)(3+3x) - 2(-x-x^2)$, mentre $3+3x$ e $-x-x^2$ sono chiaramente linearmente indipendenti quindi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ e $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Esercizio 5.6.26 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^7$ l'applicazione lineare tale che $f(x,y) = (x, x, y, y, x+y, x-y, -x-y)$.

La f è iniettiva? È suriettiva?

Trovare una base per $\ker f$ e una base per Imf.

Soluzione Esercizio: La matrice associata alla f rispetto alle basi canoniche è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{Im}(f) = \langle (1,1,0,0,1,1,-1), (0,0,1,1,1,-1,-1) \rangle$ e $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Perciò la f è iniettiva ma non è suriettiva.

Esercizio 5.6.27 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(x,y) = (x, x, y)$.

1. Scrivere la matrice $M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alle basi $\mathcal{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente.

2. Scrivere la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}_3$ e quella da $\mathcal{E}_3$ a $\mathcal{B}$.

Soluzione Esercizio:

1. $$M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.28 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare la matrice M' associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1,1,-1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.
- Determinare dimensioni e basi per $\mathrm{Im} f$ e $\ker f$.

Soluzione Esercizio:

- Calcoliamo dapprima:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Quindi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -9 \\ -4 & -6 & -6 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Una base per $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(-1,3,2),(1,3,1)\}$ quindi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Una base del nucleo di f è $\{(-1,5,3)\}$ quindi la sua dimensione è 1.

Esercizio 5.6.29 Siano $S(\mathbb{R}^{2,2})$ e $\mathbb{R}[x]_2$ rispettivamente gli spazi vettoriali delle matrici simmetriche reali 2×2 e i polinomi in una variabile a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : S(\mathbb{R}^{2,2}) \to \mathbb{R}[x]_2$ tale che:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 + 2x + 4x^2,\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x + x^2,$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 3x - 6x^2.$$

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi

$$\mathcal{B}_{S(\mathbb{R}^{2,2})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}[x]_2} := \{1, x, x^2\}.$$

2. Trovare basi e dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

Soluzione Esercizio:

1. Sia

$$\mathcal{B'}_{S(\mathbb{R}^{2,2})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B'}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}[x]_2}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo ora

$$M_{\mathcal{B}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}, \mathcal{B'}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}[x]_2}}(f) = M_{\mathcal{B'}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}[x]_2}}(f) M_{\mathcal{B}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}, \mathcal{B'}_{S(\mathbb{R}^{2,2})}}(id) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ -5 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Osserviamo che la f è sia iniettiva che suriettiva quindi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ e una base per $\mathrm{Im}(f)$ è $\{1, x, x^2\}$.

Esercizio 5.6.30 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ tale che:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + hx_2 + 3x_3 & -x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 & x_1 + 2x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(\ker f) = 2$,

2. assegnato a h uno dei valori appena trovati, determinare basi per $\mathrm{Im} f$ e $\ker f$.

Soluzione Esercizio: Vedi libro.

Esercizio 5.6.31 Si considerino le seguenti applicazioni e si determini se siano lineari o meno; di quelle lineari si dica se sono isomorfismi:

1. $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$, con
$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 2x_2 & x_3 + x_4 \end{pmatrix};$$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 32x$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^7$, $f(x, y) = (x, y, x, y, x, y, x + y)$;
4. $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 + x_2 + x_3, x_4 + x_5 + x_6)$.

Soluzione Esercizio:

1. Non è lineare.
2. È lineare. È un ismomorfismo perché $\dim \mathrm{Im}(f) = 1 \dim \mathbb{R}$.
3. È lineare. Non è un isomorfismo perché $\dim \mathrm{Im}(f) = 2 < 7$.
4. È lineare. Non è un isomorfismo perché $\dim \ker(f) = 4$.

Esercizio 5.6.32 Trovare una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tale che $\ker f = \{(x, y, z)|2x - 3y = 0\}$ e $\mathrm{Im} f = \{(a, b)|b = 2a\}$.

Soluzione Esercizio: Avremo: $f(x, y, z) = (f_1(x.y, z), f_2(x, y, z))$, ove f_1 e f_2 sono polinomi di primo grado omogenei in x, y, z. inoltre: $2f_1 = f_2$, e $f(x, 2/3x, z) = 0$, $\forall\ x, z \in \mathbb{R}$. Una soluzione è $f(x, y, z) = (2x - 3y, 4x - 6y)$.

Esercizio 5.6.33 Dare un esempio di una $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, applicazione lineare, che abbia $\dim \ker f = 1$. La f trovata è suriettiva? La matrice $M_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3}(f)$ ha rango massimo?

Soluzione Esercizio: Poiché $\dim \ker f = 4 - \dim imf$, se $\dim \ker f = 1$ allora $\dim imf = 3$ e quindi la f sarà necessariamente suriettiva. Un esempio può essere:

$$f(x, y, z, t) = (x, y, z, 0),$$

ove $\ker f = \{t = 0\}$. in questo caso avremo:

$$M_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi il rango di $M_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3}(f)$ è $3 = \dim imf$.

Esercizio 5.6.34** Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$.

Soluzione Esercizio: Per prima cosa dimostriamo che se la f è iniettiva, allora esiste g con le proprietà richieste. Per ogni $\mathbf{v} \in V$, se $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$, si ha che $\mathbf{v}$ è l'unico vettore tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Allora possiamo porre $g(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, e questo si può fare per ogni $\mathbf{w} \in imf$, quindi abbiamo definito la $g : imf \to V$.

Per definire la g su tutto W, consideriamo poi un sottospazio W_1 di W tale che $W = imf \oplus W_1$; allora avremo che ogni $\mathbf{w} \in W$ si può scrivere in un unico modo come $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, con $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in imf$. Definiamo in questo caso $g(\mathbf{w}) = g(\mathbf{w}_2)$. Ovviamente si ha $(g \circ f)(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$, cioè $g \circ f = id_V$. Dobbiamo vedere che la g è lineare; ovviamente lo è sui vettori di imf. Per vederlo su tutto W: dati $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, con $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}' = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$ (e, di conseguenza, $\mathbf{w} + \mathbf{w}' = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_1) + (\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}'_2)$), avremo

$$g(\mathbf{w} + \mathbf{w}') = g(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}'_2) = g(\mathbf{w}_2) + g(\mathbf{w}'_2) = g(\mathbf{w}) + g(\mathbf{w}'),$$

e, poiché $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}_1 + \lambda\mathbf{w}_2$,

$$g(\lambda\mathbf{w}) = g(\lambda\mathbf{w}_2) = \lambda g(\mathbf{w}_2) = \lambda g(\mathbf{w}).$$

Quindi g è lineare su tutto W.

Adesso vediamo che se esiste $g : W \to V$ con le proprietà richieste, allora f è iniettiva.

Sia $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Se esiste $\mathbf{v}' \in V$ tale che $f(\mathbf{v}') = f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, allora $(g \circ f)(\mathbf{v}') = id_V(\mathbf{v}') = \mathbf{v}'$ e $(g \circ f)(\mathbf{v}) = id_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, ma $(g \circ f)(\mathbf{v}') = g(f(\mathbf{v}')) = g(\mathbf{w}) = g(f(\mathbf{v})) = (g \circ f)(\mathbf{v})$, quindi $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, e f è iniettiva.

Esercizio 5.6.35 Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le due seguenti applicazioni lineari: $f(x, y) = (x - 2y, y)$ e $g(x, y) = (-y, 2x)$. Scrivere le matrici di $f \circ g$ e $g \circ f$ rispetto alla base canonica.

Soluzione Esercizio: Si ha: $(g \circ f)(x, y) = g(x - 2y, y) = (-y, 2x - 4y)$, mentre $(f \circ g)(x, y) = f(-y, 2x) = (-y - 4x, 2x)$. Le loro matrici sono:

$$M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}(f \circ g) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.36 Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le due seguenti applicazioni lineari: $f(x, y) = (x - y, y, x + y)$ e $g(x, y, z) = (z, 2y - z, x + z)$. Scrivere la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(g \circ f)$ della funzione $g \circ f$ dove $\mathcal{E}_3$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} := \{(1, 1), (0, 1)\}$.

Soluzione Esercizio: Si ha:

$$(g \circ f)(x, y) = g(x - y, y, x + y) = (x + y, -x + y, 2x).$$

Allora: $(g \circ f)(1,1) = (2,0,2)$ e $(g \circ f)(0,1) = (1,1,0)$, quindi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.6.37 NB: il testo del seguente esercizio è stato modificato in quanto nel libro vi era un errore di battitura. Disegnare l'immagine del vettore $\mathbf{v} = (1,1)_{\mathcal{E}}$ tramite applicazione lineare: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+3y-z, 2y, 0)$. Mostrare graficamente le coordinate di $f(\mathbf{v})$ sia nella base canonica che nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Soluzione Esercizio: In Figura 5.1 si è rappresentato il vettore $f(\mathbf{v}) = (3,2,0)_{\mathcal{E}}$ in base canonica. La Figura 5.2 rappresenta la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Le coordinate di $f(\mathbf{v})$ nella base $\mathcal{B}$ sono $f(\mathbf{v}) = (5/2, 1/2, -1/2)_{\mathcal{B}}$ e questo è rappresentato in Figura 5.3.

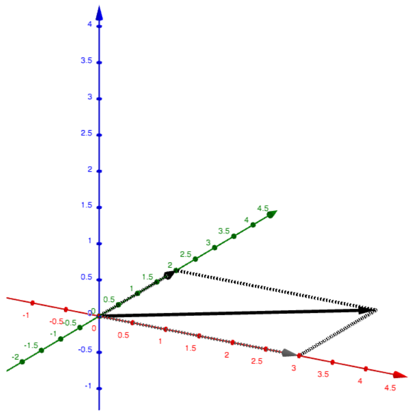

Figura 5.1: Esercizio 5.6.37: il vettore $f(\mathbf{v})$ (colorato di nero) in base canonica.

Esercizio 5.6.38 Disegnare il nucleo e l'immagine della seguente applicazione lineare:
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+3y-z, y-z, x+2y)$.

Soluzione Esercizio: L'immagine di questa applicazione lineare ha dimensione 2, in particolare $\mathrm{Im}(f)$ è il piano di equazione $-x+y+z=0$. Esso è rappresentato dal piano in Figura 5.4.

Il nucleo ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(-2,1,1)$. Esso è rappresentato dalla retta in Figura 5.4.

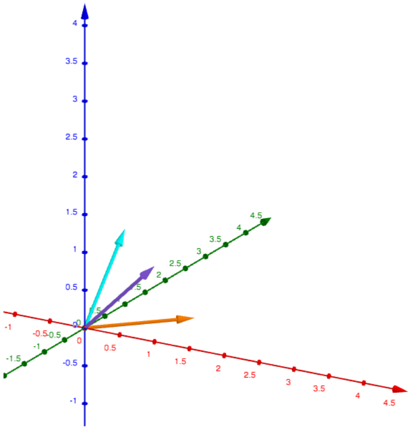

Figura 5.2: Esercizio 5.6.37: Base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

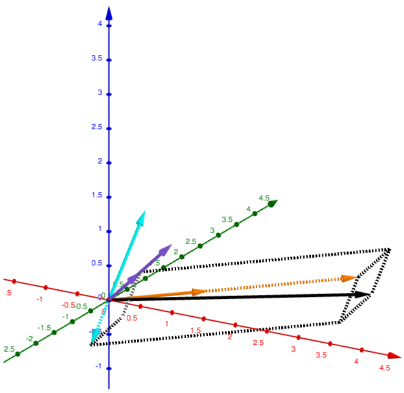

Figura 5.3: Esercizio 5.6.37: $f(\mathbf{v})$ nella base $\mathcal{B}$.

Esercizio 5.6.39 Disegnare il nucleo della seguente applicazione lineare: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+z, x-y-z)$.

Soluzione Esercizio: Il nucleo di questa applicazione lineare è $\langle(-1,-2,1)\rangle$ ed è rappresentato in Figura 5.5.

Esercizio 5.6.40 Disegnare l'immagine della seguente applicazione lineare: $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t) = (x-y, 2x-2y, 3x-3y)$.

Soluzione Esercizio: L'immagine di questa mappa ha dimensione 1 ed è generata dal vettore $(1,2,3)$. Essa è rappresentata in Figura 5.6.

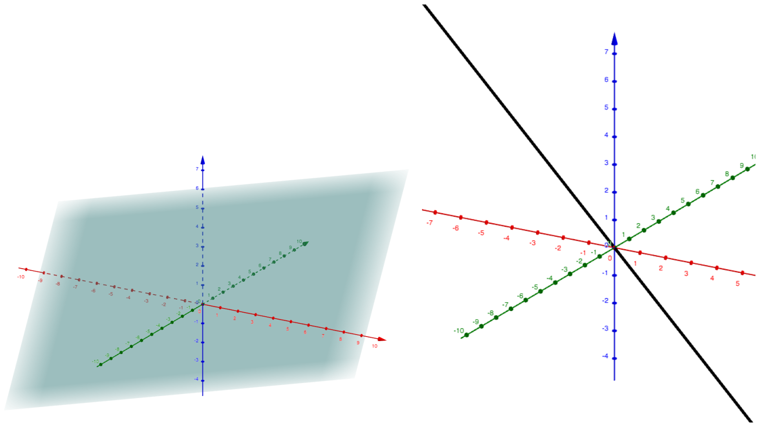

Figura 5.4: Esercizio 5.6.38: $\mathrm{Im}(f)$.

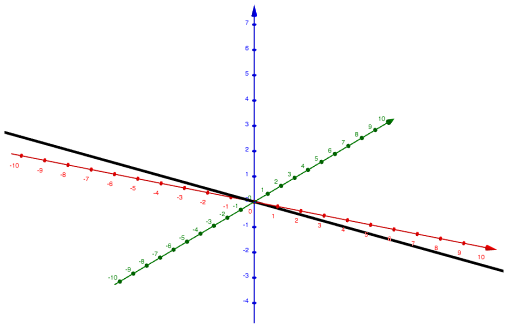

Figura 5.5: Esercizio 5.6.39: $\ker f$.

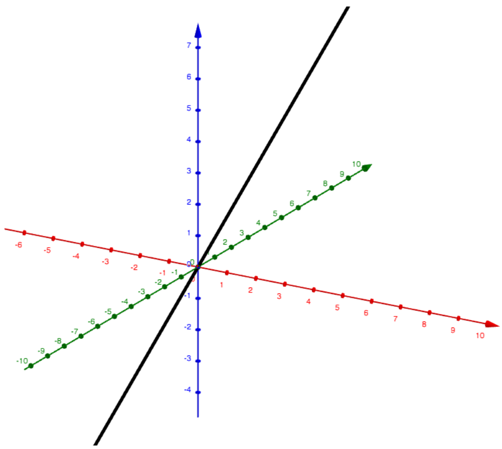

Figura 5.6: Esercizio 5.6.40: $\mathrm{Im} f$.